Redni rok 2025
Druga pisna naloga

Ministero dell'istruzione e del merito

K002 - DRŽAVNI IZPIT OB ZAKLJUČKU DRUGEGA CIKLUSA

Besedilo velja za vse navedene smeri:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO, LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Predmet: MATEMATIKA

Kandidat/-ka naj reši eno od dveh vaj in odgovori na štiri vprašanja iz vprašalnika.

VAJA 1

»*Razum ni nič brez domišljije*.« Descartes

Za dana $r > 0$ in $k < 0$ naj kandidat/-ka upošteva krožnico C_r s središčem v izhodišču in polmerom r ter funkcijo $f_k(x) = k|x|$.

a) Kandidat/-ka naj preveri, da je f_k zvezna, ampak ni odvedljiva v točki z absciso $x = 0$ za katerokoli vrednost k. Naj določi dve vrednosti r, za kateri C_r omejuje z grafom f_k, za primerne vrednosti k, krožni izsek v polravnini $y \leq 0$, ki ima ploščino π in obseg $4 + \pi$. Kandidat/-ka naj preveri, da je $r = 2$ največja izmed teh vrednosti v istem koordinatnem sistemu Oxy in naj nato zariše krožnico C_2 in graf funkcije f_{-1} .

b) Kandidat/-ka naj obravnava funkcijo $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ tako, da izpostavi definicijsko območje, simetrije, točke, v katerih ni odvedljiva, intervale monotonosti in zalogo vrednosti funkcije. Naj preveri, da se graf funkcije g ujema z delom C_2, ki se nahaja v polravnini $y \geq 0$. Kandidat/-ka naj utemelji, zakaj ni mogoče določiti inverzne funkcije za g v njenem definicijskem območju in naj določi interval $[a; b]$ z maksimalno širino, kjer $b > 0$, na katerem za g lahko določimo inverzno funkcijo h. Kandidat/-ka naj tudi izrazi h.

c) Naj bo A točka na grafu g v I. kvadrantu in naj bosta M in R njeni ortogonalni projekciji na koordinatni osi. Kandidat/-ka naj določi koordinati točke A, tako da ima četverokotnik $AMOR$ maksimalno ploščino. Po preverjanju, da je tak četverokotnik kvadrat, naj dokaže, da ima tudi maksimalni obseg.

d) Kandidat/-ka naj obravnava funkcijo $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt$, kjer $x \in [-2; 2]$. Kandidat/-ka naj določi $F(2)$ in nariše graf F po obravnavi njene monotonosti in konkavnosti. Nato naj zapiše še enačbo tangente na graf F v njenem prevoju.

COPIA CONFORME ATTI MIM

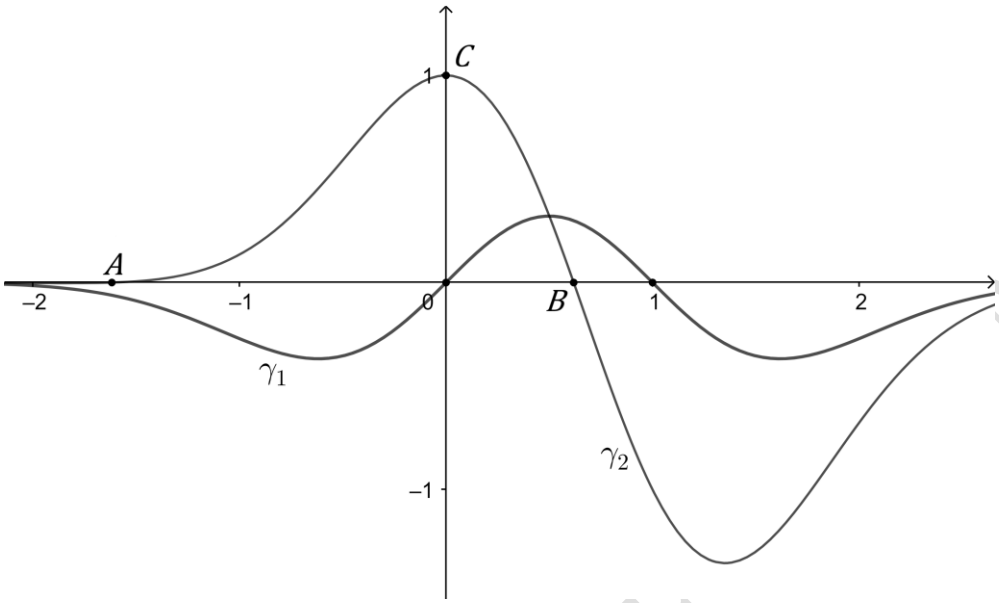
Redni rok 2025
Druga pisna naloga

Ministero dell'istruzione e del merito

K002 - DRŽAVNI IZPIT OB ZAKLJUČKU DRUGEGA CIKLUSA

VAJA 2

»Lepota je mešanje, v pravem razmerju, končnega in neskončnega.« pripisano Platonu



Grafa γ_1 e γ_2 predstavljata funkciji f in g, definirani v R, katerih analitična zapisa sta

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma 2. stopnje.

a) Kandidat/-ka naj določi polinoma $p(x)$ in $q(x)$ na podlagi danih grafov, upoštevajoč, da je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ abscisa stacionarne točke za f in da je $-\varphi$ abscisa točke A, ki je ničla funkcije g.

b) Naj bo $p(x) = x - x^2$. Kandidat/-ka naj preuči funkcijo f in navede enačbo asimptote, abscise stacionarnih točk in prevojev. Naj preveri, da je premica z enačbo $x = \frac{1}{2}$ simetrijska os γ_1. Kandidat/-ka naj določi zalogo vrednosti funkcije f in naj izrazi, ob spreminjanju realnega parametra k, število rešitev enačbe $f(x) = k$.

c) Naj bo še $q(x) = 1 - x - x^2$. Kandidat/-ka naj preveri, da je $\frac{1}{\varphi}$ tudi ničla g in da je trikotnik ABC pravokoten. Kandidat/-ka naj dokaže, da imata γ_1 in γ_2 eno samo presečišče in naj izračuna njegovi koordinati. Na krivuljah γ_1 in γ_2 naj imata točki P_1 in P_2 enako absciso $x \geq \frac{1}{2}$. Kandidat/-ka naj izračuna maksimalno dolžino daljice P_1P_2.

d) Kandidat/-ka naj izračuna ploščino območja R, ki ga omejujejo γ_1, γ_2 in abscisna os. Naj nato določi vrednost $t \geq \frac{1}{2}$, za katero premica $x = t$ omejuje z danima grafoma območje R', ki je ekvivalentno R.

COPIA CONFORME MIM

Redni rok 2025
Druga pisna naloga

Ministero dell'istruzione e del merito

K002 - DRŽAVNI IZPIT OB ZAKLJUČKU DRUGEGA CIKLUSA

VPRAŠALNIK

1. V danem trikotniku ABC, naj bo M razpolovišče stranice BC in naj bosta B' in C' dve točki, na stranici AB oziroma na stranici AC, za kateri velja, da je $AB' = \frac{1}{3}AB$ in $AC' = \frac{1}{3}AC$. Kandidat/-ka naj dokaže, da v primeru, ko sta daljici MB' in MC' skladni, potem sta skladni tudi stranici AB in AC.

2. Kandidat/-ka naj upošteva krogelno površino z enačbo $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ in ravnino π z enačbo $x - 2y - 2z + d = 0$. Kandidat/-ka naj ugotovi, ob spreminjanju realnega parametra d, ali ravnina π seka, se dotika ali leži zunaj krogelne površine. Nato naj določi vrednost parametra d, za katero π razpolovi kroglo.

3. Futuristično delo umetnika Boccioni "*Edinstvene oblike zveznosti v prostoru*" iz leta 1913, ki se pojavi na kovancu za 20 centov, predstavlja človeka, ki se hitro giblje v prostoru. Del profila, ki je posebej označen na sliki, lahko v primernem koordinatnem sistemu, približno zapišemo s funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, -1 \le x \le 0 \\ 1 + tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Kandidat/-ka naj nariše graf f, in sicer po obravnavi zveznosti in odvedljivosti na intervalu $[-1; 2]$.

4. Za funkcijo g, ki je odvedljiva v R in za katero velja, da je $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, naj kandidat/-ka določi enačbo normale na krivuljo $y = g(x)sen^2x$ v točki z absciso $\frac{\pi}{4}$.

5. Kandidat/-ka naj določi vrednost realnega parametra k tako, da sta krivulji $y = e^x$ in $y = 6 - ke^{-x}$ med seboj tangentni in naj izračuna koordinati dotikališča.

6. Kandidat/-ka naj napiše polinom f tako, da bo premica z enačbo $y = 2x + 3$ tangenta na graf f v točki z absciso 0 in da bo $\int_0^3 f(x)dx = 9$.

COPIA CONFORME ATTI MIM

Redni rok 2025
Druga pisna naloga

Ministero dell'istruzione e del merito

K002 - DRŽAVNI IZPIT OB ZAKLJUČKU DRUGEGA CIKLUSA

7. *Mar lahko po golem naključju nastane nekaj, kar do pičice ustreza resnici? Če vržeš štiri kocke, lahko po naključju dajo Venerin met* […].

Ciceron, O prerokovanju, 13–23 – prevod Nada Grošelj, Institutum Studiorum Humanitatis, Ljubljana 2010

Originalni tekst: *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis* […].

Ciceron, v dialogu z bratom Kvintom, govori o »Venerinem metu«, ko met 4 igralnih kock, ki imajo vsaka po 4 ploskve, daje 4 različne izide. Če predpostavimo, da je verjetnost, da pade vsaka ploskev, enaka, kandidat/-ka naj izračuna:

- verjetnost, da pride do Venerinega meta;
- verjetnost, da pade enako število na vsaki izmed 4 kock.

8. Koliko je anagramov, tudi nesmiselnih, besede “SPLEZATI”? V kolikih lahko preberemo besedo “PLES”, kot npr. v “ZIPLESTA”?
Koliko je anagramov, tudi nesmiselnih, besede “DOGOVOR”?

»Matematika ne pozna ras ali geografskih mej;
za matematiko je kulturni svet ena sama država.«
D. Hilbert

COPIA CONFORME ATTI MIM

Za nalogo ima kandidat/-ka največ 6 ur.
Dovoljena je uporaba znanstvenih ali grafičnih kalkulatorjev, ki ne dovoljujejo simbolnega računanja in nimajo internetne povezave.
Dovoljena je uporaba dvojezičnega slovarja (slovenščina – jezik države dijakovega izvora), in sicer za kandidate/-ke, katerih materni jezik ni italijanščina ali slovenščina.
Nihče ne sme zapustiti šolskega poslopja pred iztekom 3 ur od vročitve naloge.

Sessione ordinaria 2025
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

«*La ragione non è nulla senza l'immaginazione*» - Cartesio

Dati $r > 0$ e $k < 0$, si considerino la circonferenza C_r, di centro l'origine e raggio r, e la funzione $f_k(x) = k|x|$.

a) Verificare che f_k è continua ma non derivabile in $x = 0$ qualunque sia il valore di k. Individuare i due valori di r in corrispondenza dei quali C_r delimita con il grafico di f_k, per opportuni valori di k, un settore circolare nel semipiano $y \leq 0$ di area π e contorno di lunghezza $4 + \pi$. Stabilito che $r = 2$ è il maggiore di tali valori, in uno stesso riferimento cartesiano Oxy, tracciare la circonferenza C_2 e il grafico della funzione f_{-1} .

b) Studiare la funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, specificandone dominio, simmetrie, punti di non derivabilità, intervalli di monotonia ed insieme immagine. Verificare che il grafico di g coincide con la parte di C_2 che si trova nel semipiano $y \geq 0$. Spiegare perché g non è invertibile nel suo dominio ed esplicitare l'intervallo $[a;\ b]$ di ampiezza massima, con $b > 0$, nel quale g ammette una funzione inversa h. Qual è l'espressione analitica di h?

c) Sia A un punto del grafico di g, situato nel I quadrante, e siano M e R le sue proiezioni ortogonali sugli assi del riferimento. Determinare le coordinate di A in modo che il quadrilatero $AMOR$ abbia area massima. Dopo aver verificato che tale quadrilatero è un quadrato, dimostrare che è anche quello di perimetro massimo.

d) Si consideri la funzione $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4 - t^2}\, dt$, con $x \in [-2; 2]$. Determinare $F(2)$ e tracciare un grafico di F, dopo averne studiato monotonia e concavità. Scrivere, inoltre, l'equazione della retta tangente al grafico di F nel suo punto di flesso.

COPIA CONFORME ATTI MIM

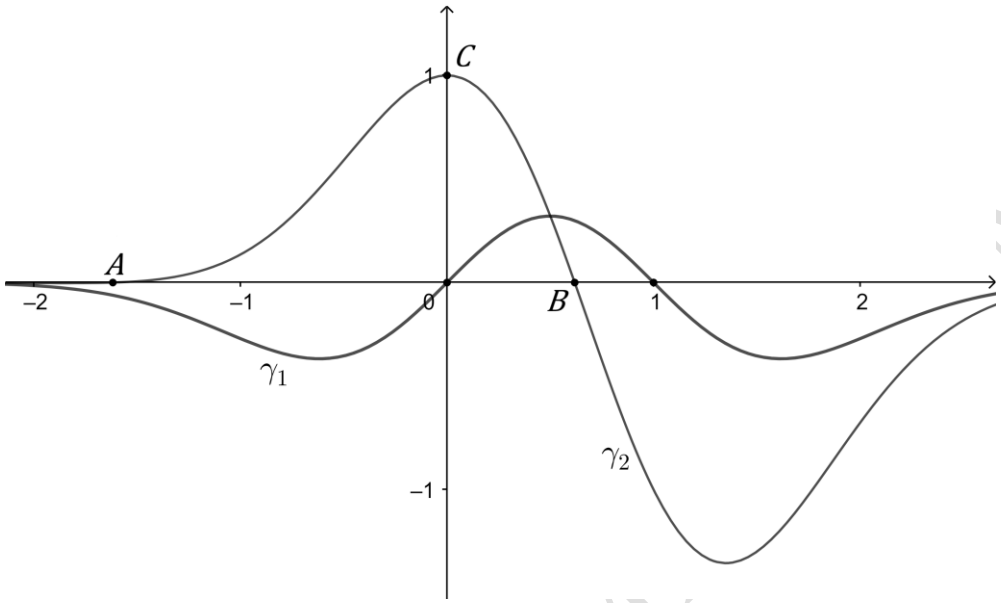
Sessione ordinaria 2025
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

PROBLEMA 2

«La bellezza è mescolare, in giuste proporzioni, il finito e l'infinito» - attribuita a Platone



I grafici γ_1 e γ_2 rappresentano, rispettivamente, le funzioni f e g, definite su $\mathbb{R}$, le cui espressioni analitiche sono

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}, \quad g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)}$$

con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di secondo grado.

a) Determinare i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ utilizzando le informazioni deducibili dai grafici in figura, considerando che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è ascissa di un punto stazionario di f e che $-\varphi$, ascissa del punto A, è uno zero di g.

b) Posto che $p(x) = x - x^2$, studiare la funzione f specificando l'equazione dell'asintoto, le ascisse dei punti stazionari e di flesso. Verificare che la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$ è asse di simmetria per γ_1. Determinare l'insieme immagine di f e indicare, al variare del parametro reale k, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Stabilito altresì che $q(x) = 1 - x - x^2$, verificare che $\frac{1}{\varphi}$ è l'ulteriore zero di g e che il triangolo ABC è rettangolo. Dimostrare che γ_1 e γ_2 hanno un unico punto di intersezione, del quale si chiedono le coordinate. Considerati su γ_1 e γ_2, rispettivamente, i punti P_1 e P_2 aventi uguale ascissa $x \geq \frac{1}{2}$, calcolare la lunghezza massima che può assumere il segmento P_1P_2.

d) Calcolare l'area della regione limitata R compresa tra γ_1, γ_2 e l'asse delle ordinate. Individuare, successivamente, il valore di $t \geq \frac{1}{2}$ affinché la retta $x = t$ delimiti con i due grafici una regione R' equivalente ad R.

COPIA CONFORME MIM

Sessione ordinaria 2025
Seconda prova scritta

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

QUESITI

1. Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC, in modo tale che $AB' = \frac{1}{3}AB$ e $AC' = \frac{1}{3}AC$. Dimostrare che, se i segmenti MB' e MC' sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC.

2. Si considerino la superficie sferica di equazione $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$ e il piano π di equazione $x - 2y - 2z + d = 0$. Discutere, al variare del parametro reale d, se il piano π è secante, tangente o esterno alla superficie sferica. Determinare il valore del parametro d in modo che π divida la sfera in due parti uguali.

3. L'opera futurista di Boccioni "*Forme uniche della continuità nello spazio*" del 1913, riportata sulla moneta da 20 centesimi, descrive un uomo che avanza velocemente nello spazio. Una parte del profilo evidenziato in figura, in un opportuno sistema di riferimento, può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -4x^2 - 8x, & -1 \le x \le 0 \\ 1 + \tan\left(x + \frac{3}{4}\pi\right), & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f, dopo averne analizzato la continuità e la derivabilità nell'intervallo $[-1; 2]$.

4. Assegnata una funzione g, derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, determinare l'equazione della retta normale alla curva $y = g(x)\, sen^2 x$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{4}$.

5. Determinare il valore del parametro reale k in modo che le due curve $y = e^x$, $y = 6 - ke^{-x}$ risultino tangenti tra loro, individuando le coordinate del punto di contatto.

6. Scrivere una funzione polinomiale f in modo tale che la retta di equazione $y = 2x + 3$ sia tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 e si abbia $\int_0^3 f(x)dx = 9$.

COPIA CONFORME ATTI MIM

Ministero dell'istruzione e del merito

A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE

7. *Siccome mi sembrava che per puro caso alcuni fatti fossero avvenuti così com'erano stati predetti dagl'indovini, tu hai parlato a lungo del caso, e hai detto, per esempio, che si può ottenere il "colpo di Venere" lanciando a caso quattro dadi* […].

Cicerone, De divinatione, II, 21, 48 - traduzione e cura di S. Timpanaro, Garzanti, Milano 1999.

Testo originale - *Nam cum mihi quaedam casu viderentur sic evenire ut praedicta essent a divinantibus, dixisti multa de casu, ut Venerium iaci posse casu quattuor talis iactis* […].

Cicerone, nel dialogo con il fratello Quinto, parla del colpo di Venere, che consiste nel lanciare 4 dadi a 4 facce ottenendo 4 risultati diversi. Supponendo che le facce di ciascun dado siano equiprobabili, determinare:

- la probabilità di ottenere il colpo di Venere nel lancio di 4 dadi;
- la probabilità di ottenere 4 numeri tutti uguali.

8. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "STUDIARE"? In quanti di tali anagrammi si può leggere consecutivamente la parola "ARTE", come ad esempio in "SUARTEDI"?

Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola "VACANZA"?

«La matematica non conosce razze o confini geografici;
per la matematica, il mondo culturale è una singola nazione»
D. Hilbert

COPIA CONFORME ATTI MIM

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.