



*Ministero dell'istruzione e del merito*

**K002 - DRŽAVNI IZPIT VIŠJE SREDNJE ŠOLE**

**Besedilo velja za vse navedene smeri:**

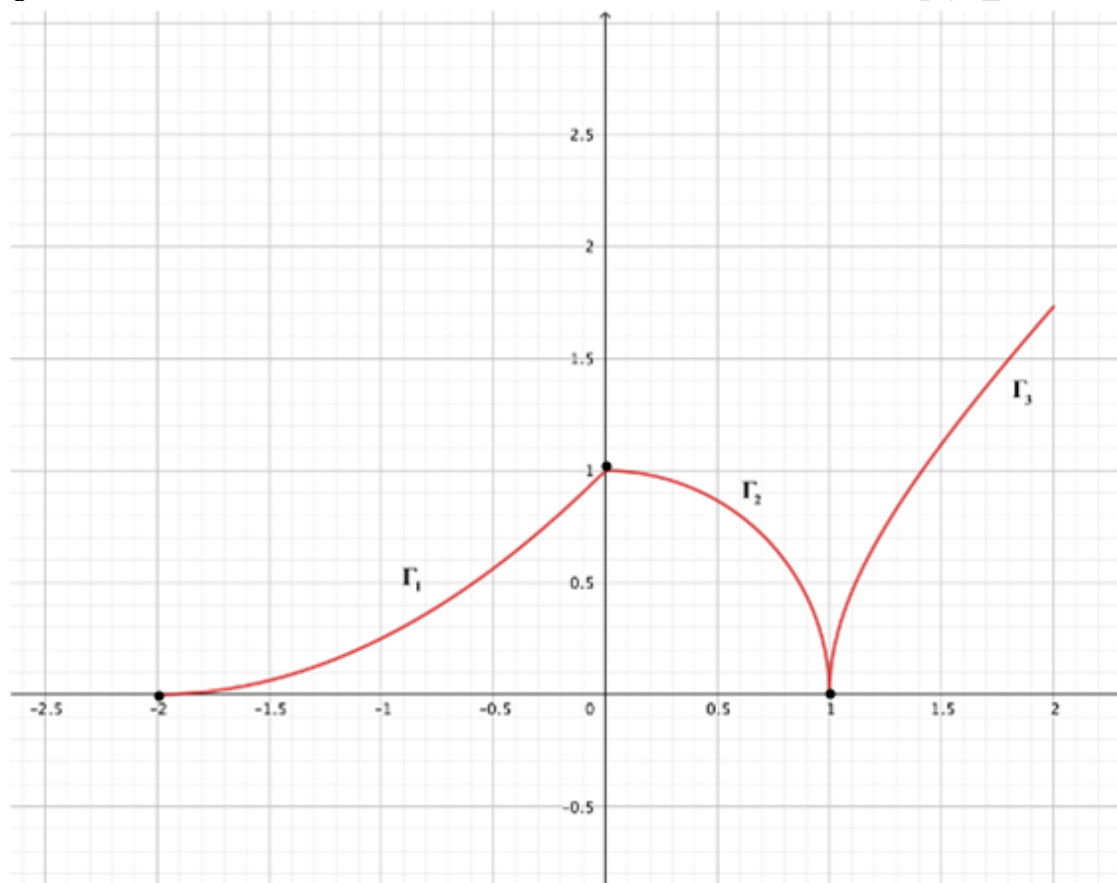
LI02, LI03, LI15, LI1S, L122, L123, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

**Naloga iz: MATEMATIKE**

**Kandidat/ka naj reši eno od dveh vaj in odgovori na 4 vprašanja, ki sestavljajo vprašalnik.**

**VAJA 1**

Graf na sliki, ki prikazuje zvezno funkcijo  $y = f(x)$ , je unija loka parabole  $\Gamma_1$ , loka krožnice  $\Gamma_2$  in loka hiperbole  $\Gamma_3$ .



- a) Napiši predpis funkcije  $f$ , definirane na odsekih na intervalu  $[-2; 2]$  z uporabo enačb:

$$y = a(x + 2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

in poišči primerne vrednosti za realne parametre  $a, b, c$ .

Raziskuj odvedljivost funkcije  $f$  in napiši enačbe morebitnih tangent v točkah z absciso

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

- b) Na osnovi grafa funkcije  $f$  sklepaj za graf njegove derivate  $f'$  in poišči intervale konkavnosti in konveksnosti funkcije  $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ .

*Ministero dell'istruzione e del merito***K002 - DRŽAVNI IZPIT VIŠJE SREDNJE ŠOLE****Besedilo velja za vse navedene smeri:**LI02, LI03, LI15, LI1S, L122, L123, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
LIB2, LIC2, LID2, LI12, LI13, LI14, LIIS, LIS2, EA02, EA10**Naloga iz: MATEMATIKE**

- c) Upoštevaj funkcijo  $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$ , definirano na intervalu  $[-2; 0]$ , katere  $\Gamma_1$  je grafični prikaz. Obrazloži, zakaj je sledeča funkcija obrnljiva in napiši predpis njej inverzne funkcije  $h$ . Raziskuj odvedljivost funkcije  $h$  in nariši njen graf.
- d) Naj bo  $S$  krivočrtni lik drugega kvadranta, ki ga omejujejo graf  $\Gamma_1$  in kartezijski osi. Določi vrednost realnega parametra  $k$ , tako da bo premica z enačbo  $x = k$  razdelila  $S$  na dve ekvivalentni območji.

**VAJA 2**Za določen realni parameter  $a$ , kjer  $a \neq 0$ , upoštevaj tako definirano funkcijo  $f_a$ :

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

katere graf naj bo označen z  $\Omega_a$ .

- a) Ob spreminjanju vrednosti parametra  $a$  določi definicijsko območje funkcije  $f_a$ , raziskuj morebitne nezveznosti in napiši enačbe vseh njenih asimptot.
- b) Pokaži, da za  $a \neq 1$  vsi grafi  $\Omega_a$  sečejo lastno vodoravno asimptoto v isti točki in si delijo isto tangento v izhodišču.
- c) Ob spreminjanju vrednosti  $a < 1$  poišči intervale naraščanja in padanja funkcije  $f_a$ . Izpelji študij funkcije  $f_{-1}(x)$  in nariši graf  $\Omega_{-1}$ .
- d) Izračunaj ploščino krivočrtnega lika, ki ga omejujejo graf  $\Omega_{-1}$ , premica, tangenta na graf v izhodišču, in premica  $x = \sqrt{3}$ .



*Ministero dell'istruzione e del merito*

**K002 - DRŽAVNI IZPIT VIŠJE SREDNJE ŠOLE**

**Besedilo velja za vse navedene smeri:**

LI02, LI03, LI15, LI1S, L122, L123, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
LIB2, LIC2, LID2, LI12, LI13, LI14, LIIS, LIS2, EA02, EA10

**Naloga iz: MATEMATIKE**

**VPRAŠANJA**

- Naj bo  $ABC$  pravokotni trikotnik s pravim kotom v oglišču  $A$ . Naj bo  $O$  središče kvadrata  $BCDE$ , načrtanega na hipotenuzi na nasprotni strani oglišča  $A$ .  
Dokaži, da je točka  $O$  enako oddaljena od nosilk daljic  $AB$  in  $AC$ .
- Nepoštena igralna kocka, ki ima oštevilčene ploskve od 1 do 6, ima sledečo lastnost: verjetnost vsake ploskve s sodim številom pik, da pade, je dvojna glede na verjetnost vsake ploskve z lihim številom pik. Pri metu ene kocke izračunaj verjetnost dogodkov:
  - pade praštevilo;
  - padejo vsaj 3 pike;
  - padejo največ 3 pike.
- Upoštevajoč premico  $r$ , ki gre skozi dve točki  $A(1, -2, 0)$  in  $B(2, 3, -1)$ , določi kartezijsko enačbo krogelne ploskve s središčem v  $C(1, -6, 7)$  in tangentno na  $r$ .
- Izmed vseh paralelepipedov s kvadratno osnovno ploskvijo in prostornino  $V$  določi, ali ima tisti z minimalno površino tudi diagonalno z najkrajšo dolžino.
- Določi enačbo premice, tangentne na krivuljo z enačbo  $y = \sqrt{25 - x^2}$  v njeni točki z absciso 3, z uporabo dveh različnih metod.
- Določi vrednosti realnih parametrov  $a$  in  $b$ , tako da:
 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$
- Upoštevaj funkcijo:
 
$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Določi, za katere vrednosti parametrov  $a, b$  je funkcija odvedljiva. Ugotovi, ali obstaja interval v  $\mathbb{R}$ , v katerem funkcija  $f$  zadošča pogojem Rolleovega izreka. Utemelji odgovor.
- Dana je funkcija  $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ , definirana v množici realnih števil. Določi, za katere vrednosti parametra  $a > 0$  ima funkcija tri realne in različne ničle.

Za nalogo ima kandidat/ka največ 6 ur.

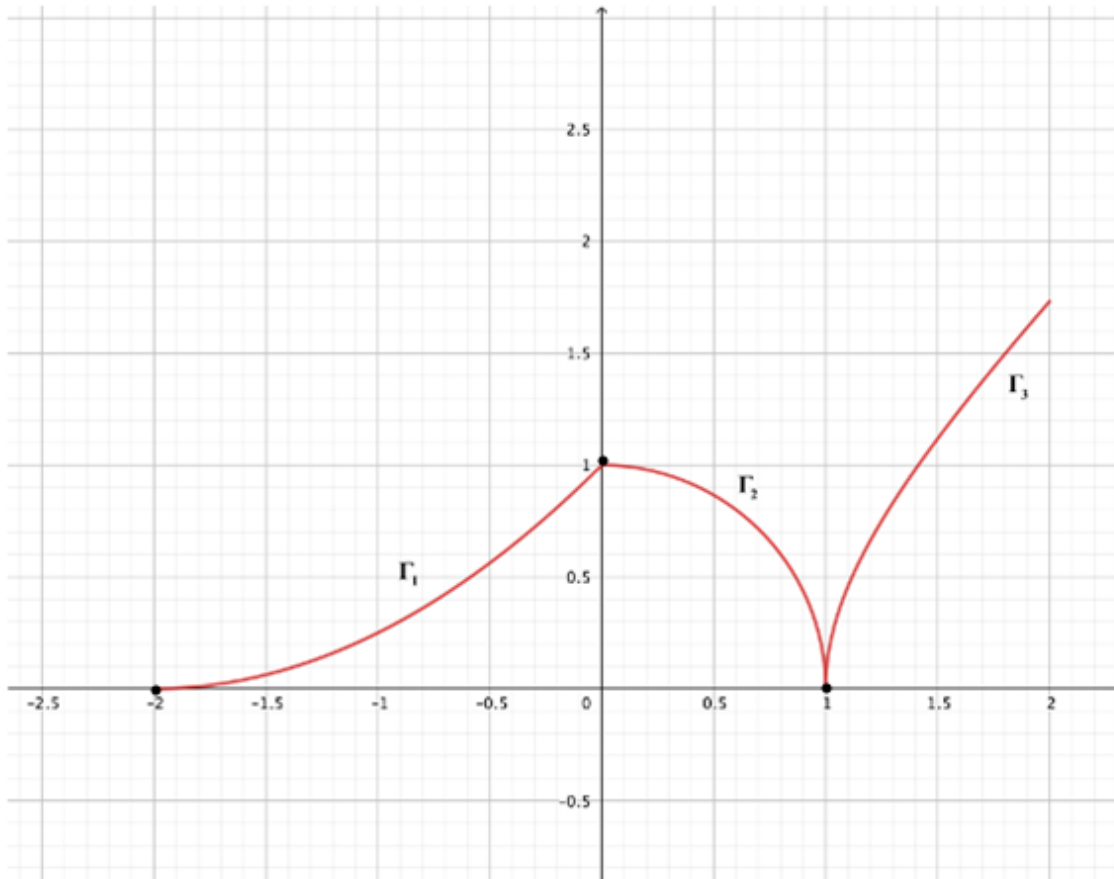
Dovoljena je uporaba slovarja, pravopisa in znanstvenih ter/ali grafičnih kalkulatorjev, ki ne dovoljujejo simbolnega računanja (dopis MIM št. 9305 z dne 20. marca 2023).

Nihče ne sme zapustiti šolskega poslopja pred iztekom 3 ur od vročitve naloge.


*Ministero dell'istruzione e del merito*
**A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE**
**Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:**

 LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
 LIB2, LIC2, LID2, LI2, LI3, LI4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

**Disciplina: MATEMATICA**
***Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.***
**PROBLEMA 1**

 Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua  $y = f(x)$ , è unione dell'arco di parabola  $\Gamma_1$ , dell'arco di circonferenza  $\Gamma_2$  e dell'arco di iperbole  $\Gamma_3$ .


- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione  $f$  definita a tratti nell'intervallo  $[-2; 2]$ , utilizzando le equazioni:

$$y = a(x + 2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

 e individuare i valori opportuni per i parametri reali  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

 Studiare la derivabilità della funzione  $f$  e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

*Ministero dell'istruzione e del merito***A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE****Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:**LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
LIB2, LIC2, LID2, LI2, LI3, LI4, LIIS, LIS2, EA02, EA10**Disciplina: MATEMATICA**

- b) A partire dal grafico della funzione  $f$ , dedurre quello della sua derivata  $f'$  e individuare gli intervalli di concavità e convessità di  $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ .
- c) Si consideri la funzione  $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ , definita nell'intervallo  $[-2; 0]$ , di cui  $\Gamma_1$  è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa  $h$ . Studiare la derivabilità di  $h$  e tracciarne il grafico.
- d) Sia  $S$  la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico  $\Gamma_1$  e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale  $k$  affinché la retta di equazione  $x = k$  divida  $S$  in due regioni equivalenti.

**PROBLEMA 2**

Fissato un parametro reale  $a$ , con  $a \neq 0$ , si consideri la funzione  $f_a$  così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con  $\Omega_a$ .

- a) Al variare del parametro  $a$ , determinare il dominio di  $f_a$ , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.
- b) Mostrare che, per  $a \neq 1$ , tutti i grafici  $\Omega_a$  intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.
- c) Al variare di  $a < 1$ , individuare gli intervalli di monotonia della funzione  $f_a$ . Studiare la funzione  $f_{-1}(x)$  e tracciarne il grafico  $\Omega_{-1}$ .
- d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico  $\Omega_{-1}$ , la retta ad esso tangente nell'origine e la retta  $x = \sqrt{3}$ .



*Ministero dell'istruzione e del merito*

**A002 - ESAME DI STATO CONCLUSIVO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE**

**Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:**

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,  
 LIB2, LIC2, LID2, LI2, LI3, LI4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

**Disciplina: MATEMATICA**

**QUESITI**

1. Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $A$ . Sia  $O$  il centro del quadrato  $BCDE$  costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice  $A$ .  
 Dimostrare che  $O$  è equidistante dalle rette  $AB$  e  $AC$ .
2. Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
  - un numero primo
  - un numero almeno pari a 3
  - un numero al più pari a 3
3. Considerata la retta  $r$  passante per i due punti  $A(1, -2, 0)$  e  $B(2, 3, -1)$ , determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro  $C(1, -6, 7)$  e tangente a  $r$ .
4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume  $V$ , stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.
5. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione  $y = \sqrt{25 - x^2}$  nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.
6. Determinare i valori dei parametri reali  $a$  e  $b$  affinché:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

7. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & x < 0 \\ ax + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali  $a, b$  la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di  $\mathbb{R}$  in cui la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

8. Data la funzione  $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ , definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro  $a > 0$  la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico. (Nota MIM n. 9305 del 20 marzo 2023).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.