Redni rok 2019
Druga pisna naloga

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

DRŽAVNI IZPIT VIŠJE SREDNJE ŠOLE

Smer: LI02, EA02 – ZNANSTVENI
LI03 - ZNANSTVENI – UPORABNE ZNANOSTI
LI15 - ZNANSTVENI - ŠPORTNI
(Besedilo velja tudi za sorodna mednarodna in štiriletna eksperimentiranja)

Naloga iz: MATEMATIKE in FIZIKE

Kandidat/ka naj reši eno od dveh vaj in odgovori na 4 od osmih vprašanj, ki sestavljajo vprašalnik.

VAJA 1

Dani sta funkciji:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Dokaži, da ima funkcija g, za poljubni vrednosti a in b v $\mathbb{R}$, kjer $a \neq 0$, absolutni maksimum in absolutni minimum. Določi vrednosti a in b, za kateri se grafa funkcij f in g sekata v točki $A(2, 1)$.

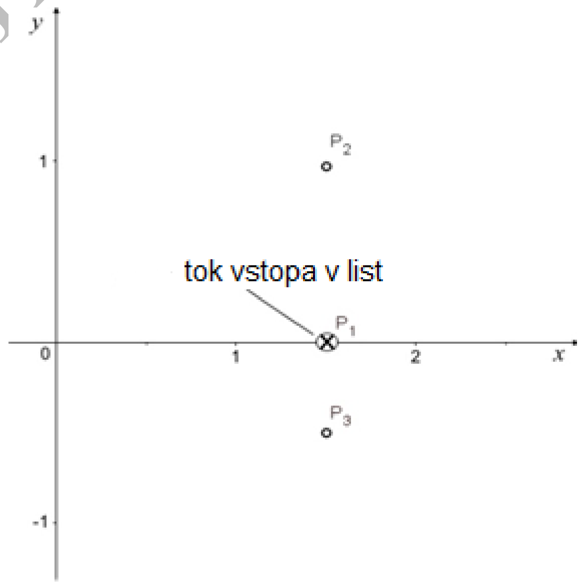
- Privzemi, od sedaj dalje, da sta $a = 1$ in $b = -1$. Obravnavaj tako dobljeni funkciji in preveri, da je graf funkcije g središčno simetričen ter da se grafa f in g dotikata v točki $B(0, -1)$. Določi tudi ploščino ravninskega območja S, ki ga omejujeta grafa funkcij f in g.

- Predpostavi, da so v koordinatnem sistemu Oxy dolžine izražene v metrih (m). Obravnavaj tri ravne prevodne žice, ki ležijo pravokotno na ravnino Oxy in gredo skozi točke:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ in $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  Skozi žice tečejo enosmerni električni tokovi z jakostmi $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 in i_3. Samo smer toka i_1 je nakazana na sliki, ostali dve smeri pa nista nakazani.

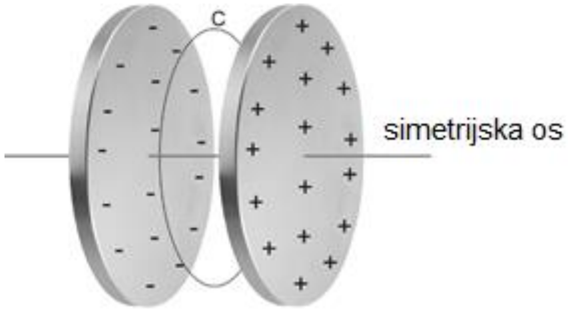
  Določi, kako se spreminja vrtinčnost magnetnega polja, ki ga ustvarjajo tokovi i_1, i_2 in i_3 po zaključeni poti okoli S glede na jakosti in smeri i_2 in i_3.



- Predpostavi, da je ob odsotnosti treh žic rob območja S profil prevodne tuljave z danim uporom $R = 0{,}20\ \Omega$. Tuljava leži v notranjosti homogenega magnetnega polja z gostoto $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T, ki je pravokotno na območje S. Ko se tuljava vrti okoli osi x s stalno kotno hitrostjo ω, se v njej inducira tok z maksimalno jakostjo 5,0 mA. Določi vrednost ω.

VAJA 2

Ploščati kondenzator sestavljata dve vzporedni okrogli plošči s polmerom R v razdalji d, kjer sta R in d izražena v metrih (m). Plošči sta priključeni na izvor napetosti, ki se spreminja s časom; njena začetna vrednost je enaka nič.



V notranjosti kondenzatorja se pojavi magnetno polje $\vec{B}$. Če zanemarimo učinke ob robu, se gostota $\vec{B}$, z enoto tesla (T), spreminja v odvisnosti od razdalje simetrijske osi r od kondenzatorja po zakonu:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{za } r \le R$$

kjer sta a in k pozitivni stalnici, t pa predstavlja čas in je izražen v sekundah (s).

- Določi merski enoti za a in k ter nato razloži, zakaj se v kondenzatorju pojavi magnetno polje tudi ob odsotnosti magnetov oziroma kondukcijskih tokov. Kako se glasi zveza med smerema $\vec{B}$ in električnega polja $\vec{E}$ v notranjosti kondenzatorja?

- Med ploščama naj bo na ravnini, ki je pravokotna na simetrijsko os, dana krožnica C s središčem na osi in polmerom r. Določi vrtinčnost $\vec{B}$ okoli C in iz le-te preveri, da za pretok $\vec{E}$ skozi krožno ploskev, ki jo določa C, velja:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Izračunaj spremembo potenciala med ploščama kondenzatorja.
  Določi vrednost, h kateri teži $\left|\vec{B}\right|$ v odvisnosti od časa in utemelji odgovor iz fizikalnega vidika.

- Za dani $a > 0$ naj bo funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana v obliki $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Preveri, da je funkcija $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ tista primitivna dane f, katere graf gre skozi izhodišče. Obravnavaj funkcijo F, tako da določiš morebitne simetrije, asimptote in ekstremne vrednosti. Dokaži, da ima F dva prevoja v točkah z abscisama $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ in določi naklon tangent na graf F v teh točkah.

- S primernimi utemeljitvami izpelji graf f iz grafa F ter razloži, kaj predstavljajo abscise prevojev F za funkcijo f. Določi ploščino območja med grafom f, abscisno osjo in vzporednicama ordinatni osi, ki gresta skozi ekstrema funkcije. Za določen $b > 0$ izračunaj vrednost $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

VPRAŠALNIK

1. Dana je funkcija $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, kjer $d \in \mathbb{R}$ in $p(x)$ je polinom. Graf funkcije f seka abscisno os v točkah z abscisama 0 in $12/5$ ter ima za asimptote premice z enačbami $x = 3$, $x = -3$ in $y = 5$. Določi relativne minimume in maksimume funkcije f.

2. Dana je funkcija

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Dokaži, da obstaja en sam $x_0 \in \mathbb{R}$, za katerega je $g(x_0) = 0$. Določi nato vrednost

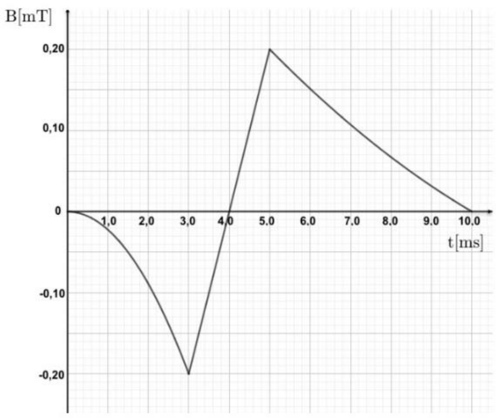
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

3. Med vsemi pravokotnimi prizmami s kvadratno osnovno ploskvijo in dano površino *S* določi tisto, za katero je vsota dolžin vseh robov minimalna.

4. Dani sta točki $A(2, 0, -1)$ in $B(-2, 2, 1)$. Dokaži, da je geometrijsko mesto točk P v prostoru, za katere velja $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, krogelna ploskev *S* ter zapiši njeno kartezijsko enačbo. Preveri, da točka $T(-10, 8, 7)$ pripada *S* in določi enačbo ravnine, ki se v točki *T* dotika *S*.

5. Vržemo 4 kocke z oštevilčenimi ploskvami od 1 do 6.
   - Katera je verjetnost, da vsota 4 padlih števil ne presega 5?
   - Katera je verjetnost, da je produkt 4 padlih števil večkratnik od 3?
   - Katera je verjetnost, da je maksimalno padlo število enako 4?

6. Bakrena tuljava z uporom $R = 4{,}0\ \mathrm{m\Omega}$ in presekom $30\ \mathrm{cm}^2$ leži v homogenem magnetnem polju s silnicami, ki so pravokotne na tuljavo. Komponenta magnetnega polja, ki je pravokotna na ploskev, se spremeni v odvisnosti od časa, kakor je prikazano na sliki. Obrazloži zvezo med spreminjanjem polja, ki inducira tok, in smerjo induciranega toka. Določi povprečni tok skozi tuljavo v naslednjih časovnih intervalih:



   a) od 0,0 ms do 3,0 ms;
   b) od 3,0 ms do 5,0 ms;
   c) od 5,0 ms do 10 ms.

7. V laboratoriju opazujemo gibanje delca vzdolž pozitivne abscisne osi. V začetnem trenutku je delec v izhodišču koordinatnega sistema, v časovnem intervalu 2,0 ns preteče razdaljo 25 cm. Z vesoljske ladje, ki se giblje s hitrostjo $v = 0{,}80\ c$ v pozitivni smeri osi x laboratorija, opazujejo gibanje istega delca. Določi povprečno hitrost delca v obeh opazovalnih sistemih. Kolikšen časovni interval in kolikšno razdaljo bi izmeril opazovalec na vesoljski ladji?

8. Proton prileti v del prostora, kjer je prisotno homogeno magnetno polje z modulom $|\vec{B}| = 1{,}00$ mT in se začne gibati po tiru v obliki spirale s stalnim korakom $\Delta x = 38{,}1$ cm, ki ga sestavljata enakomerno kroženje s polmerom $r = 10{,}5$ cm in enakomerno premo gibanje. Določi modul vektorja hitrosti in kot, ki ga le-ta oklepa z $\vec{B}$.

FIZIKALNE STALNICE		
osnovni naboj	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
masa protona	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
svetlobna hitrost	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s

Za nalogo ima kandidat/ka največ 6 ur.
Dovoljena je uporaba slovarja, pravopisa in znanstvenih ter/ali grafičnih kalkulatorjev, ki jih ni mogoče programirati in ki ne dovoljujejo uporabe simbolov (M.U. št. 205, čl. 17, o. 9).
Nihče ne sme zapustiti šolskega poslopja pred iztekom 3 ur od narekovanja naloge.

Sessione ordinaria 2019
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

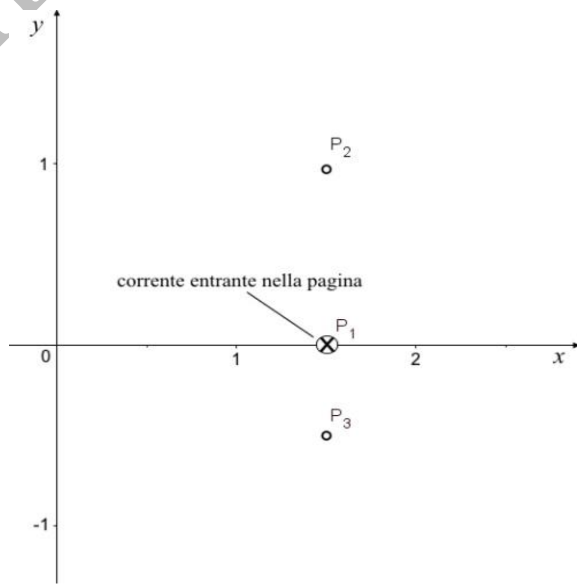
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

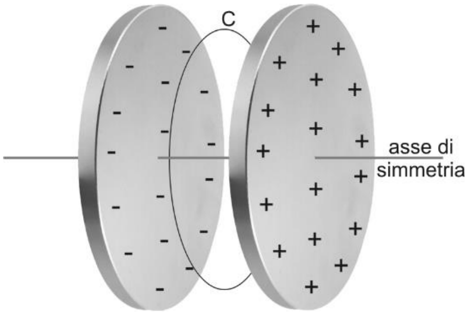
  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
  A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

QUESITI

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area *S*, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4. Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica *S* e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a *S* e determinare l'equazione del piano tangente in T a *S*.

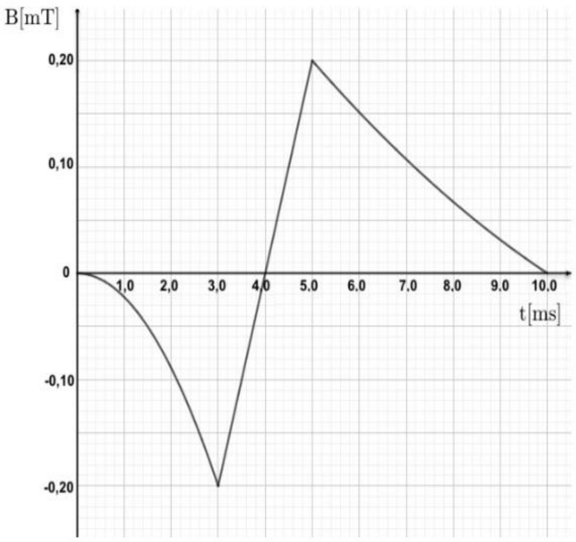
5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
   - Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
   - Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
   - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \text{m}\Omega$, racchiude un'area di $30\ \text{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

   d) da 0,0 ms a 3,0 ms;

   e) da 3,0 ms a 5,0 ms;

   f) da 5,0 ms a 10 ms.



7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00\ \mathrm{mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1\ \mathrm{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5\ \mathrm{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.